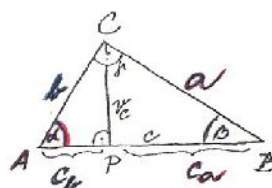


7. Eukleidovy věty, věta Pythagorova (pravoúhlý Δ)



$a, b \dots$ délky odvěsny $c \dots$ délka přepony $h \dots$ výška na přeponu

$c_a \dots$ ÚSEK PŘEPONY PŘÍLEHLÝ K ODVĚSNĚ BC ($|BC| = a$)

$c_b \dots$ ÚSEK PŘEPONY PŘÍLEHLÝ K ODVĚSNĚ AC ($|AC| = b$)

$$c = c_a + c_b$$

$$\Delta ACP \sim \Delta ABC \sim \Delta CBP (uu) \Rightarrow$$

$$\Delta ACP \sim \Delta ABC \Rightarrow b : c_b = c : b$$

$$\frac{b}{c_b} = \frac{c}{b}$$

$$b^2 = c c_b$$

Eukl. věty, s odvěsnami

$$\Delta CBP \sim \Delta ABC \Rightarrow a : c_a = c : a$$

$$\frac{a}{c_a} = \frac{c}{a}$$

$$a^2 = c c_a$$

$$\Delta ACP \sim \Delta CBP \Rightarrow c_b : h = h : c_a$$

$$\frac{c_b}{h} = \frac{h}{c_a}$$

$$h^2 = c_a c_b$$

Eukl. věta o výšce

POZOR!
 c_a je úsek strany a (ne u , vrchol A)
od c_b (u vrcholu B)

EUKLEIDOVA VĚTA

- O VÝŠCE $h^2 = c_a c_b$

- V každém pravoúhlém Δ je druhá mocnina výšky na přeponu rovna součinu délek obou úseků přepony.

- první koním (geom.): obsah čtverce vstrojeného nad výškou pravoúhlého Δ se rovná obsahu obdélníka vstrojeného k obou úsekům přepony

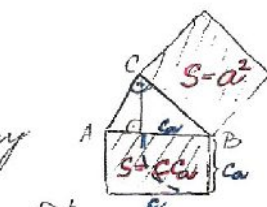


- O ODVĚSNĚ $a^2 = c c_a$ $b^2 = c c_b$

- V každém pravoúhlém Δ je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a příslušného úseku

- první koním (geom.):

obsah čtverce vstrojeného nad odvěsnou pravoúhlého Δ se rovná obsahu obdélníka vstrojeného k přeponě a příslušnému úseku



- provede se číselně a upravením

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= c c_a \\ b^2 &= c c_b \end{aligned} \right\} +$$

$$a^2 + b^2 = c c_a + c c_b$$

$$a^2 + b^2 = c(c_a + c_b) \quad c_a + c_b = c$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{Pyth. věta}$$

Pythagorova čísla - trojice přímých, vztahující se k

$$x^2 + y^2 = z^2$$

(např. 3, 4, 5 6, 8, 10 5, 12, 13 8, 15, 17 ...)

Pythagorova Δ - pravoúhlé, strany Pyth. čísel

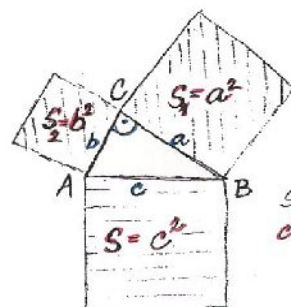
PYTHAGOROVA VĚTA

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- V každém pravoúhlém Δ je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhé mocniny délek obou odvěsny

- první koním (geom.):

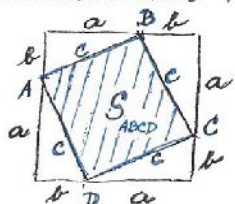
obsah čtverce vstrojeného nad přeponou pravoúhlého Δ se rovná součtu obsahů čtverců vstrojených nad oběma odvěsnami



$$S = S_1 + S_2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

délka mnohem - např. čtverec vstřícný a v něm menší



$$S_{ABCD} = c^2$$

$$S_{ABCD} = S_{\square} - 4S_{\Delta} = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} ab =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

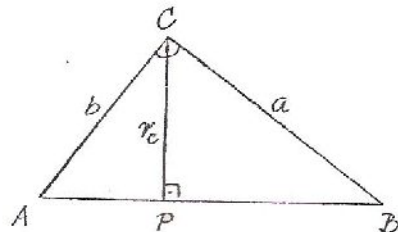
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{od.}$$

od. (což bylo dokázáno)

10) Známosti graficky Euklidovy věty a Pythagorovu větu
 (návod: vizlecie)

- Euklidova věta
 o VÝŠCE

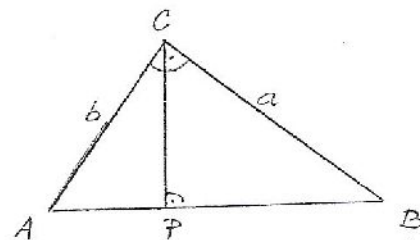
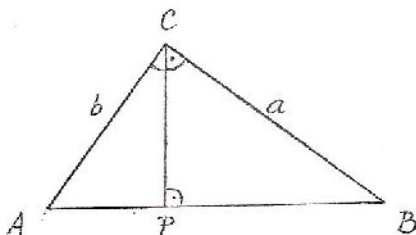
$$h_c^2 = c \cdot c_p$$



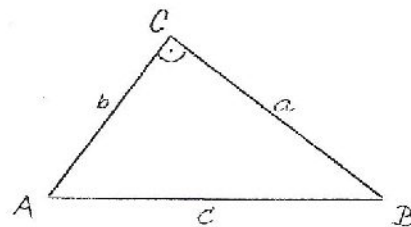
- Euklidova věta
 o ODVĚSNĚ

$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$



- Pythagorova věta
 $c^2 = a^2 + b^2$

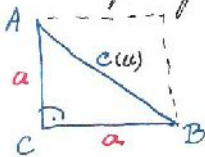


Příklady

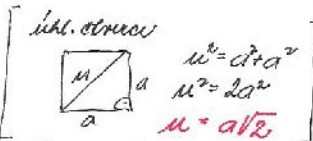
1.136 a)

a) délku úhlopříčky pravoh. rovnoramenn. Δ s odvěsnou a (délku úhlopříčky čtverce o straně a)

!



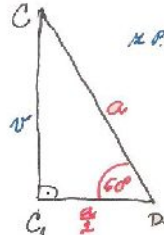
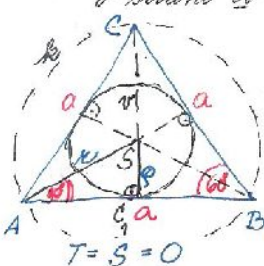
p.v. $c^2 = a^2 + a^2$
 $c^2 = 2a^2$
 $c = a\sqrt{2}$



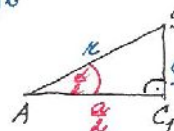
[úhl. strany] $u^2 = a^2 + a^2$
 $u^2 = 2a^2$
 $u = a\sqrt{2}$

! Vhodné užití ZPRÁVĚTI ($\Rightarrow$ důkaz): slonová úhl. hypot.

b) výšku v , poloměr kružnice vstřípné ρ a vpravení q v rovnoramenném Δ

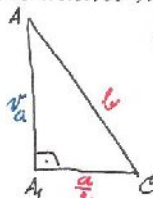


p.v. $v^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2$
 $v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$
 $v^2 = \frac{3a^2}{4}$
 $v = \frac{\sqrt{3}a}{2}$
 $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
 $q = \frac{a}{2}$



$\frac{a}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$
 $\cos 30^\circ = \frac{v}{a}$
 $a \cos 30^\circ = v$
 $v = \frac{a}{2} \cos 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $v = \frac{a\sqrt{3}}{4}$
 $\rho = \frac{a}{2} \sin 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{4}$
 $q = \frac{a}{2}$

c) výšku v_a a kolíkadnu r rovnoramenn. Δ se kolíkadnou délkou a a ramennem b



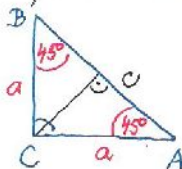
[PLATÍ V ROVNORAM. Δ $v_a = h_a$!]

p.v. $b^2 = v_a^2 + (\frac{a}{2})^2$
 $v_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$
 $v_a^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4}$
 $v_a = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$

$v_a = \frac{1}{4} (4b^2 - a^2)$ $\left[v_a = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} \right]$
 $v_a = \sqrt{\frac{1}{4} (4b^2 - a^2)}$
 $v_a = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}$

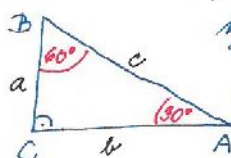
② dobrá, nu

1.137 a) v pravoh. rovnoramenn. ΔABC ($\angle C = 90^\circ$, $a = b$, $\alpha = \beta = 45^\circ$) je poměr stran $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$



$a = b$
 $c^2 = a^2 + a^2$
 $c = a\sqrt{2}$
 $a : b : c = a : a : a\sqrt{2}$ (zjednotíme)
 $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$

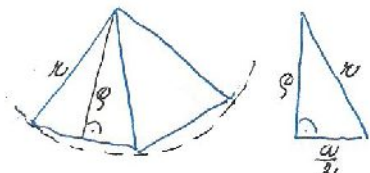
b) v pravoh. rovnoramenn. ΔABC ($\angle C = 90^\circ$), kde $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, je $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$



naj. strany pomocí jedné strany
 - poměry c
 $\sin 30^\circ = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \sin 30^\circ$
 $a = \frac{1}{2} c$
 $\sin 60^\circ = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \sin 60^\circ$
 $b = \frac{\sqrt{3}}{2} c$
 $a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$
 $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$

③ Učiv mlah mezi délkou

1.138 strany a , potoměrmi vpravení kružnice ρ a potoměrmi vpravení kružnice ρ pravidelného n -úhelníku



p.v. $\rho^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

④ dobrá, nu, jak Δ jsou pravoh.! strany:

1.142 a) 3 cm, 4 cm, 6 cm

b) 5 cm, 12 cm, 13 cm

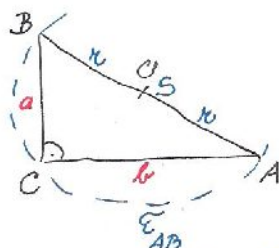
p.v. $6^2 = 3^2 + 4^2$
 $36 = 9 + 16$
 $36 \neq 25$
 NE

$13^2 = 12^2 + 5^2$
 $169 = 144 + 25$
 $169 = 169$
 ANO [5, 12, 13 - Pythagor]

c) $m^2 + n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$
 $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$
 $m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2$
 $0 = 0$ ANO

d) $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ ($m \geq 2$)
 $(m^2 + 1)^2 = (m^2 - 1)^2 + (2m)^2$
 $m^4 + 2m^2 + 1 = m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2$
 $2m^2 + 1 = 2m^2 + 1$
 $0 = 0$ ANO

- ⑤ Polný odvisený pravouhlého Δ je $a = 30 \text{ cm}$, $b = 12,5 \text{ cm}$. Vypočítajte polomery kruhu a kružnice Δ opísané a vpiaté.



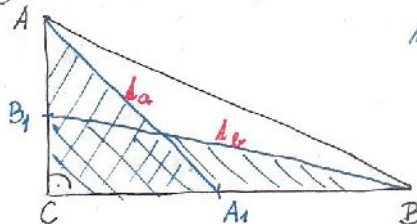
$$R = \frac{c}{2} \text{ (Thalet. kruž.)}$$

$$R = \frac{32,5}{2}$$

$$R = 16,25 \text{ cm}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 30^2 + 12,5^2 = 1056,25 \Rightarrow c = 32,5 \text{ cm}$$

- ⑥ Vypočítajte dĺžky strán prav. ΔABC ($\angle C = 90^\circ$), pokiaľ $h_a = 8 \text{ cm}$, $h_b = 12 \text{ cm}$.



ΔA_1AC , ΔB_1BC - pravouhlé

$$\text{K.P.V. } h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$$

$$64 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$144 = \frac{b^2}{4} + h^2$$

$$156 = 4h^2 + a^2 \quad | (-4) (*)$$

$$576 = h^2 + 4a^2$$

$$-1024 = -16h^2 - 4a^2 \quad \left. \begin{array}{l} 576 = h^2 + 4a^2 \\ -1024 = -16h^2 - 4a^2 \end{array} \right\} +$$

$$576 = h^2 + 4a^2$$

$$-448 = -15h^2$$

$$15h^2 = 448$$

$$h^2 = \frac{448}{15}$$

$$h = 5,465 \text{ cm}$$

$$h = 5,5 \text{ cm}$$

$$(*) a^2 = 256 - 4h^2$$

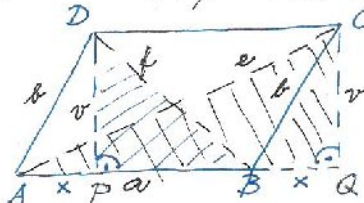
$$a^2 = 256 - 4 \cdot \frac{448}{15}$$

$$a^2 = 136,57$$

$$a = 11,68$$

$$a = 11,7 \text{ cm}$$

- ⑦ Dokážte, že v rovnoběžníku ABCD platí mezi úhlopříčkami a stranami vztah $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.



$$\text{K } \Delta ACQ \quad e^2 = (a+x)^2 + y^2$$

$$\text{K } \Delta BDP \quad f^2 = (a-x)^2 + y^2 \quad \left. \begin{array}{l} e^2 = (a+x)^2 + y^2 \\ f^2 = (a-x)^2 + y^2 \end{array} \right\} +$$

$$e^2 + f^2 = a^2 + 2ax + x^2 + y^2 + a^2 - 2ax + x^2 + y^2$$

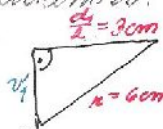
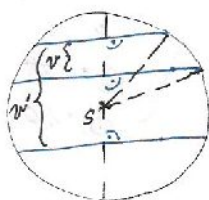
$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2x^2 + 2y^2$$

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2(x^2 + y^2)$$

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\text{K } \Delta BCQ: \quad b^2 = x^2 + y^2$$

- ⑧ Dvě rovnoběžné kružnice s kružnicí a poloměry 6 cm mají dĺžky 6 cm a 10 cm. Vraťte jejich vzdálenost.

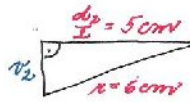


$$r_1^2 = R^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2$$

$$r_1^2 = 36 - 9$$

$$r_1^2 = 27$$

$$r_1 = \sqrt{27}$$



$$r_2^2 = R^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 = 36 - 25$$

$$r_2^2 = 11$$

$$r_2 = \sqrt{11}$$

2 ŘEŠENÍ

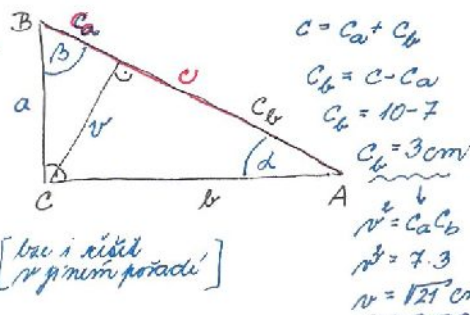
$$v = r_1 - r_2 = \sqrt{27} - \sqrt{11} = 1,88 \approx 1,9 \text{ cm}$$

$$v' = r_1 + r_2 = \sqrt{27} + \sqrt{11} = 8,51 \approx 8,5 \text{ cm}$$

9) Vypočítejte délky stran a, b, c , c_a, c_b, r, d, β v $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$)

1.139 a) $c = 10 \text{ cm}, c_a = 7 \text{ cm}$ $c = 10, c_a = 7 \text{ cm}$ $v^2 = c_a c_b$ $a^2 = c c_a$ $b^2 = c c_b$ $c^2 = a^2 + b^2$
Eukl. v. o výšce Eukl. věty o odřez.

2.6
dokon.

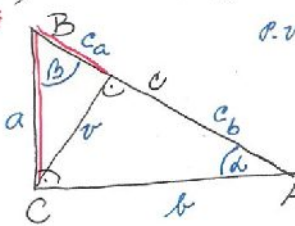


$$\begin{aligned} c &= c_a + c_b \\ c_b &= c - c_a \\ c_b &= 10 - 7 \\ c_b &= 3 \text{ cm} \\ v^2 &= c_a c_b \\ v^2 &= 7 \cdot 3 \\ v &= \sqrt{21} \text{ cm} \\ a^2 &= c c_a \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \\ a^2 &= 10 \cdot 7 \\ a^2 &= 70 \\ a &= \sqrt{70} \text{ cm} \\ b^2 &= 100 - 70 \\ b^2 &= 30 \\ b &= \sqrt{30} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin d &= \frac{a}{c} \left[\frac{\text{mlr}}{b} \right] \\ \sin d &= \frac{\sqrt{70}}{10} \\ d &= 56^\circ 47' \\ \beta &= 90^\circ - d \\ \beta &= 33^\circ 13' \end{aligned}$$

b) $a = 5 \text{ cm}, c_a = 4 \text{ cm}$ ($\beta, c, c_b, r, d, \beta$)

2.6



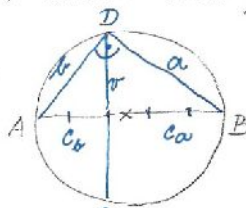
$$\begin{aligned} \text{P.V. } a^2 &= v^2 + c_a^2 \\ v^2 &= a^2 - c_a^2 \\ v^2 &= 25 - 16 \\ v^2 &= 9 \\ v &= 3 \text{ cm} \\ c_b &= \frac{v^2}{c_a} \\ c_b &= \frac{9}{4} \\ c_b &= 2,25 \text{ cm} \\ c &= c_a + c_b \\ c &= 4 + 2,25 = 6,25 \text{ cm} \end{aligned}$$

P.V. (mlr E.V.)

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ b^2 &= 6,25^2 - 5^2 \\ b^2 &= 14,06 \\ b &= 3,75 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin d &= \frac{a}{c} \\ \sin d &= \frac{5}{6,25} = 0,8 \\ d &= 53^\circ 10' (4') \\ \beta &= 90^\circ - d \\ \beta &= 90^\circ - 53^\circ 10' \\ \beta &= 36^\circ 50' (36^\circ 53') \end{aligned}$$

10) Vypočítejte délku řídny v kružnici a poloměru $r = 10 \text{ cm}$, $k \perp l$, k a l jsou dvě přímky k ní kolmé v poměru 2:3.

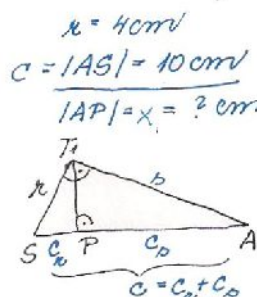
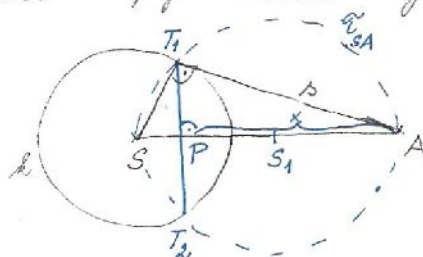


délka řídny
 $|CD| = 2r$

$$\begin{aligned} c_b : c_a &= 2 : 3 \\ c &= c_a + c_b = c = 2r \\ c &= 2 \cdot 10 \\ c &= 20 \text{ cm} \\ c_b &= \frac{2}{5} c = \left(\frac{2}{5} \cdot 20 \right) = \frac{2}{5} \cdot 20 \\ c_b &= 8 \text{ cm} \\ c_a &= \frac{3}{5} c = \left(\frac{3}{5} \cdot 20 \right) = 12 \text{ cm} \\ [c_a = c - c_b = 20 - 8 = 12 \text{ cm}] \\ v^2 &= c_a c_b \\ v^2 &= 12 \cdot 8 = 96 \\ v &= \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ cm} \\ |CD| &= 2r = 8\sqrt{6} \text{ cm} = 19,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mlr } v^2 &= c_a^2 - c_b^2 \\ v^2 &= c_a^2 - c_b^2 \\ v^2 &= 12^2 - 8^2 \\ v^2 &= 144 - 64 \\ v^2 &= 80 \\ v &= \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm} \end{aligned}$$

11) Je dána $k(S; 4 \text{ cm})$ a bod A, $|AS| = 10 \text{ cm}$. Vypočítejte vzdálenost bodu A od spojnice bodů dotyku řídny vedených z bodu A ke kružnici k .



$$\begin{aligned} x &= c_b = |SA| - |SP| \\ c &= |AS| = 10 \text{ cm} \\ |AP| &= x = ? \text{ cm} \\ x &= 10 - 1,6 \\ x &= 8,4 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eukl. v. od odřez.} \\ v^2 &= c c_b \\ c_b &= \frac{v^2}{c} \\ c_b &= \frac{16}{10} \\ c_b &= 1,6 \text{ cm} \end{aligned}$$